$\boxed{19}$ Visa att $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$ där a, b, c, d är heltal

Bl. övn 4 kan skrivas som u^2+v^2 där u, v är heltal

Lösning

Vi provar med att faktorisera de två parenteserna:

$$(a^2+b^2) = (a^2-(-1)b^2) = (a^2-i^2b^2) = (a^2-(ib)^2)$$
$$= (a+ib)(a-ib)$$

Konjugatregeln baklänges

På samma sätt får vi

$$(c^2+d^2) = (c+id)(c-id)$$

Nu får vi

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (a+ib)(a-ib)(c+id)(c-id)$$

Omgruppera

$$= (a+ib)(c-id)(a-ib)(c+id)$$

Multiplicera ihop parenteserna parvis

$$= (ac-iad+ibc+bd)(ac+iad-ibc+bd)$$

Sortera upp real- och imaginärdelar i respektive parentes

$$= (ac+bd-iad+ibc)(ac+bd+iad-ibc)$$

Likadana termer men med motsatta tecken
Detta kan vi utnyttja!

Bryt ut i i resp. parentes

$$= (ac+bd-i(ad-bc))(ac+bd+i(ad-bc))$$

Konjugatregeln

$$= (ac+bd)^2 - i^2(ad-bc)^2$$
$$= (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2$$
$$= u^2+v^2 \quad \text{om vi sätter } u = ac+bd$$
$$v = ad-bc$$

Eftersom a, b, c, d heltal kommer också $u = ac+bd$ och $v = ad-bc$ att vara heltal, och vi är klara.

Kommentar: Detta är <u>inte</u> en lätt uppgift.