32

Bl övn 3.

Vi tar det allmänna fallet (sista punkten) direkt.

Visa att $y = axe^{ax}$ har ett minimivärde som är oberoende av a. $(a \neq 0)$

Lösning:

$$y = axe^{ax} = ax \cdot e^{ax}$$

Förstaderivatan

$$y' = a \cdot e^{ax} + ax \cdot ae^{ax} = e^{ax}(a + a^2x) = a(1+ax)e^{ax}$$

$$y' = 0 \text{ ger } a(1+ax)e^{ax} = 0$$

$$1 + ax = 0$$

$$x = -\frac{1}{a}$$

Andraderivatan

$$y'' = a^2 e^{ax} + a(1+ax)ae^{ax} = a^2 e^{ax}(1 + (1+ax))$$

$$= a^2(2+ax)e^{ax}$$

$$y''\left(-\frac{1}{a}\right) = a^2\left(2 + a\left(-\frac{1}{a}\right)\right)e^{a\cdot(-\frac{1}{a})} = a^2(2-1)e^{-1} = a^2e^{-1} > 0$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{a} \text{ ger } y_{min} = a\left(-\frac{1}{a}\right)e^{a(-\frac{1}{a})} = (-1)\cdot e^{-1} = -\frac{1}{e}$$

Minimivärdet $\left(-\frac{1}{e}\right)$ är alltså oberoende av a. □