4316

Sätt $z = \cos v + i \sin v$ Då får vi med hjälp av de Moivres formel

$$z^5 = \cos 5v + i \sin 5v \qquad (*)$$

Vi kan också beräkna z^5 den långa vägen. Om vi utnyttjar att (se nästa sida)

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5$$

så får vi

$$z^5 = (\cos v + i \sin v)^5 = \cos^5 v + 5\cos^4 v \cdot i \cdot \sin v + 10\cos^3 v \cdot i^2 \cdot \sin^2 v$$
$$+ 10\cos^2 v \cdot i^3 \cdot \sin^3 v + 5\cos v \cdot i^4 \cdot \sin^4 v + i^5 \cdot \sin^5 v.$$
$$= \cos^5 v + 5i\cos^4 v \sin v - 10\cos^3 v \cdot \sin^2 v$$
$$- 10 i \cos^2 v \cdot \sin^3 v + 5\cos v \cdot \sin^4 v + i \sin^5 v$$
$$= (\cos^5 v - 10\cos^3 v \cdot \sin^2 v + 5\cos v \sin^4 v)$$
$$+ i(5\cos^4 v \sin v - 10\cos^2 v \sin^3 v + \sin^5 v)$$
$$(**)$$

Jämför vi nu realdelar och imaginärdelar i $(*)$ och $(**)$ får vi

$$\cos 5v = \cos^5 v - 10\cos^3 v \cdot \sin^2 v + 5\cos v \cdot \sin^4 v$$

$\sin^2 v + \cos^2 v = 1$
$\Rightarrow \sin^2 v = 1 - \cos^2 v$

$$= \cos^5 v - 10\cos^3 v(1-\cos^2 v) + 5\cos v(1-\cos^2 v)^2$$
$$= \cos^5 v - 10\cos^3 v + 10\cos^5 v + 5\cos v(1 - 2\cos^2 v + \cos^4 v)$$
$$= \cos^5 v - 10\cos^3 v + 10\cos^5 v + 5\cos v - 10\cos^3 v + 5\cos^5 v$$
$$= 16\cos^5 v - 20\cos^3 v + 5\cos v$$

$\sin^2 v + \cos^2 v = 1$
$\Rightarrow \cos^2 v = 1 - \sin^2 v$

$$\sin v = 5\cos^4 v \sin v - 10\cos^2 v \sin^3 v + \sin^5 v$$
$$= 5(1-\sin^2 v)^2 \sin v - 10(1-\sin^2 v)\sin^3 v + \sin^5 v$$
$$= 5(1 - 2\sin^2 v + \sin^4 v)\sin v - 10\sin^3 v + 10\sin^5 v + \sin^5 v$$
$$= 5\sin v - 10\sin^3 v + 5\sin^5 v - 10\sin^3 v + 10\sin^5 v + \sin^5 v$$
$$= 16\sin^5 v - 20\sin^3 v + 5\sin v.$$

$\boxed{4316}$

(forts)

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = (a+b)(a^2+2ab+b^2) = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = (a+b)(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3) = a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3$$

$$+ a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4$$

$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = (a+b)(a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4)$$

$$= a^5 + 4a^4b + 6a^3b^2 + 4a^2b^3 + ab^4$$

$$+ a^4b + 4a^3b^2 + 6a^2b^3 + 4ab^4 + b^5$$

$$= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$