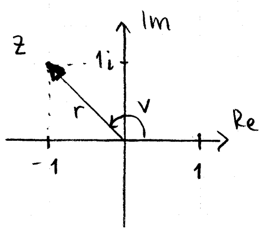
$\boxed{4313}$ (a) $z = -1 + i$

Gå över till polär form: $r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$



Ur figuren ser vi direkt att

$$v = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$(90° + 45°)$

Alltså:

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

Då får vi

de Moivres formel

$$z^n = (\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)^n = (\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\cdot 3\pi}{4} + i\sin\frac{n\cdot 3\pi}{4}\right)$$

Nu ser vi att z^n reellt om (och endast om)

Ett komplext tal är reellt om imaginärdelen = 0

$$\sin\frac{n\cdot 3\pi}{4} = 0 \qquad (*)$$

Se uppgift 2213 (b):
$\sin v = 0$
$v = 0 + n\cdot 2\pi$
eller
$v = \pi - 0 + n\, 2\pi$
Dessa lösningar kan sammanfattas i
$v = n\pi$, n heltal

Nu kommer vi ihåg att ekvationen $\sin v = 0$ har lösningar som kan sammanfattas i $v = k\pi$, där $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$.

Vi brukade använda n här, men nu är ju n upptaget

Då ser vi att $(*)$ ger

$$\frac{n\cdot 3\pi}{4} = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

$$\frac{3n}{4} = k, \qquad k \text{ heltal}$$

Vi ska alltså hitta det minsta (positiva) tal n sådant att $\frac{3n}{4}$ blir ett heltal. Det talet är $n = 4$

Ser man inte direkt kan man pröva sig fram.

Svar: $n = 4$