3323

y: antal bakterier

t: tid i timmar

$$\frac{dy}{dt} = 0{,}08y, \qquad y(0) = 100 \qquad (*)$$

(a) Svar: Antalet bakterier ökar i varje tidsögonblick med en hastighet som är 8 % av aktuella antalet bakterier (enhet: antal per timme).

Från början är antalet bakterier 100.

(b) Nu behöver vi lösa en differentialekvation. Först i Ma 5-kursen kommer vi att lära oss allmänna lösningsmetoder så nu får vi knep & knåpa. Om vi tittar på $(*)$ ser vi att den funktion $y(t)$ som vi är på jakt efter nästan har sig själv som derivata (derivatan = 0,08 · funktionen). Men exponentialfunktioner har ju nästan sig själva som derivator!

$y(t) = e^t$ har exakt sig själv som derivata, likaså $y(t) = Ce^t$, där C är en konstant. Så dessa duger inte. Men kanske $y(t) = C \cdot e^{kt}$, där k är en annan konstant. Låt oss se om vi kan bestämma k så att

$$y(t) = Ce^{kt} \qquad (1)$$

blir en lösning till $(*)$.

Derivatan blir $y'(t) = C \cdot ke^{kt}$. $\qquad (2)$

Insättning av (1) och (2) i $(*)$ ger

$$\cancel{C}k\cancel{e^{kt}} = 0{,}08\cancel{C}\cancel{e^{kt}}$$

dvs $k = 0{,}08$.

Väljer vi alltså k till 0,08 är (1) en lösning till $(*)$!

3323

(forts)

Vi har alltså kommit fram till att

$$y(t) = C e^{0,08t}$$

Begynnelsevillkoret $y(0)=100$ ger nu konstanten C:

$$100 = C e^{0,08 \cdot 0}$$

$$100 = C$$

Alltså är

$$y(t) = 100 e^{0,08t}$$

en lösning till (*)

(Att detta är den <u>enda</u> lösningen till (*) får vi dock vänta till Ma 5-kursen för att reda ut)

<u>Svar:</u> $y = 100 e^{0,08t}$