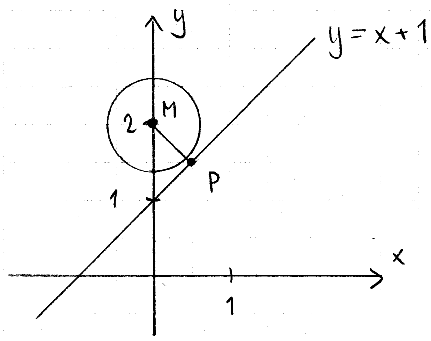
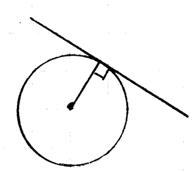
4127

Cirkeln $r^2 = x^2 + (y-2)^2$ har medelpunkt i $(0,2)$

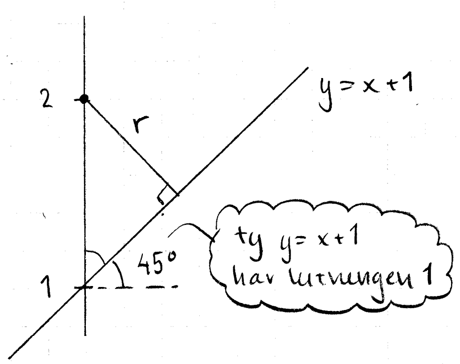
Gör en skiss:



Om linjen $y = x + 1$ ska vara en tangent till cirkeln måste radien MP vara vinkelrät mot $y = x + 1$ (en tangent till en cirkel är alltid vinkelrät mot en radie till tangeringspunkten).



Då kan vi göra en ny figur:



Ur figuren får vi att

$$\sin 45° = \frac{r}{1}$$

$$r = \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

sin 45° kan beräknas exakt

Svar: $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Alternativ lösning

Vi kan också bestämma r så att cirkeln $r^2 = x^2 + (y-2)^2$ och linjen $y = x + 1$ har exakt en skärningspunkt.

Leta skärningspunkter genom att lösa ekv. systemet

$$\begin{cases} y = x + 1 & (1) \\ r^2 = x^2 + (y-2)^2 & (2) \end{cases}$$

Insättning av (1) i (2) ger

$$r^2 = x^2 + (x + 1 - 2)^2$$

$$r^2 = x^2 + (x-1)^2$$

$$r^2 = x^2 + x^2 - 2x + 1$$

$$2x^2 - 2x + 1 - r^2$$

$$x^2 - x + \frac{1-r^2}{2} = 0$$

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1-r^2}{2}}$$

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{2(1-r^2)}{2 \cdot 2}}$$

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1-2(1-r^2)}{4}}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-2(1-r^2)}}{2}$$

Denna ekvation har en lösning om

$$1 - 2(1-r^2) = 0$$

$$1 - r^2 = \frac{1}{2}$$

$$r^2 = \frac{1}{2}$$

$$r = \overset{+}{(-)}\sqrt{\frac{1}{2}} \quad , \quad r > 0$$

Cirkeln och linjen har alltså en skärningspunkt om $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Svar: $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$