

3226

$$f(x) = x^3 - ax$$

(a) En funktion är växande för alla x om $f'(x) > 0$ för alla x .

Vi undersöker derivatan:

$$f'(x) = 3x^2 - a$$

Om $a < 0$ kommer $f'(x) = 3x^2 - a > 0$ för alla x , eftersom $x^2 > 0$ för alla x .

(b) Om $a > 0$:

Derivatans nollställen? $f'(x) = 0$ ger

$$3x^2 - a = 0$$

$$3x^2 = a$$

$$x^2 = \frac{a}{3}$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{3}}$$

Skulle också kunna försöka hitta derivatans nollställen genom att lösa ekvationen $3x^2 - a = 0$. Denna ekvation saknar dock lösning om $a < 0$. Då har $f'(x)$ samma tecken för alla x . Kolla tex $f'(0) = 3 \cdot 0^2 - a > 0$, så ser vi att derivatan är positiv för $x = 0$, och då måste den vara positiv för alla x .

Teckenlabell

x	$-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{3}}$			$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{3}}$		
$f'(x)$	+	0	-	0	+	
$f(x)$	↗		↘		↗	
		MAX		MIN		

$$f'(-a) = 3(-a)^2 - (-a) = 3a^2 + a > 0$$

$$f'(0) = 3 \cdot 0^2 - a = -a < 0$$

$$f'(a) = 3a^2 - a > 0$$

Av teckenlabellen framgår att f har ett lokalt max och ett lokalt min om $a > 0$.