4.3 Cirkelrörelse

Ungefär cirkelformiga rörelser är vanliga i astrofysiken. Planeterna kretsar runt solen i banor som är ganska cirkelformiga, och månar kretsar runt de flesta planeterna. Inom fysiken kallas den här typen av rörelse för *centralrörelse* eftersom rörelsen sker kring ett centrum.

Kraften som håller kvar ett föremål i en cirkelbana kallar vi för *centralkraft*. Den kan förmedlas av ett gravitationsfält, ett elektriskt eller magnetiskt fält.

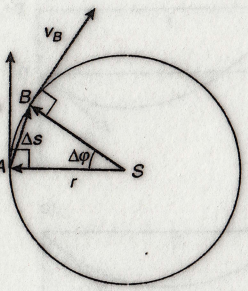
Här ska vi begränsa oss till att studera punktformiga föremål som rör sig i cirkelformade banor. Vi kommer inte att ta hänsyn till föremålens utsträckning. Det innebär att vår modell fungerar bra för planetrörelser eller för partiklar som går i cirkelbanor i centralfält, men dåligt för de roterande delarna på en bil eller för en breakdansare som spinner på huvudet! För att kunna behandla sådana cirkelrörelser behöver vi en mer avancerad modell som även tar hänsyn till massfördelningen hos föremålet.

Centripetalacceleration

Vi börjar med att studera ett föremål som rör sig i en cirkelformig bana med *konstant banhastighet*. Det betyder att hastigheten $\vec{v}$ har konstant absolutvärde v. Men även om absolutvärdet är konstant, så är inte hastighetsvektorn konstant. Hastigheten ändrar ju riktning hela tiden. Det betyder att föremålet har en acceleration $\vec{a}$. Vi ska bestämma riktningen och absolutvärdet till accelerationen med hjälp av definitionen

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Då måste vi ta till en del tricks. Försök att följa med i härledningen så att du *förstår* varje enskilt steg. Du behöver inte komma ihåg alltsammans. Däremot måste du komma ihåg resultatet, alltså accelerationens *riktning* och *storlek*.



4.6a Cirkelrörelse med konstant banhastighet.

Accelerationens riktning

Tänk dig att föremålet följer en cirkelbana med centrum S och radien r. Se figur 4.6a.

Föremålet passerar punkten A vid tidpunkten t och punkten B vid tidpunkten $t + \Delta t$. Vinkeln mellan SA och SB är lika med $\Delta\varphi$. Eftersom $SA = SB = r$ blir $\Delta\varphi$ toppvinkel i den likbenta triangeln SAB.

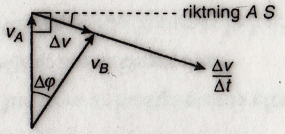
Enligt figuren är $\vec{SA} + \vec{AB} = \vec{SB}$. Därför kan vi skriva förflyttningen $\vec{\Delta s} = \vec{AB} = \vec{SB} - \vec{SA}$. Hastigheten är $\vec{v}_A$ i punkten A och $\vec{v}_B$ i punkten B. Båda hastigheterna har absolutvärdet v. Hastighetsändringen från A till B är

$$\vec{\Delta v} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$$

under tidsintervallet Δt. Hastighetsvektorerna är tangenter till cirkelbanan. Då måste $\vec{v}_A$ vara vinkelrät mot $\vec{SA}$ och $\vec{v}_B$ vara vinkelrät mot $\vec{SB}$. Det betyder att vinkeln mellan $\vec{v}_A$ och $\vec{v}_B$ är lika med $\Delta\varphi$.

Vi ritar en ny triangel med v_A och v_B och Δv som sidor. Se figur 4.6b. I figuren ser du att $\vec{v}_A + \vec{\Delta v} = \vec{v}_B$. Även här ser du att vi kan skriva hastighetsändringen som $\vec{\Delta v} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$.

Eftersom banhastigheten är konstant, är detta en likbent triangel med toppvinkeln $\Delta\varphi$. Medelaccelerationen $\vec{\Delta v}/\Delta t$ under tidsintervallet Δt har samma riktning som $\vec{\Delta v}$. Om vi låter $\Delta t \to 0$ så kommer också $\Delta\varphi \to 0$. Då kommer medelaccelerationen att närma sig ett vinkelrätt läge mot $\vec{v}_A$ och alltså peka in mot centrum av cirkeln. Det betyder att momentanaccelerationen $\vec{a}$ i punkten A måste peka in mot cirkelns centrum.



4.6b Hastighetsvektorerna bildar en likbent triangel med toppvinkeln $\Delta\varphi$.

Absolutvärdet av accelerationen

De två trianglarna i 4.6a och 4.6b är likformiga, eftersom båda är likbenta och har samma toppvinkel $\Delta\varphi$. Det ger oss

$$\frac{\Delta v}{\Delta s} = \frac{v}{r}$$

Vi multiplicerar med Δs och dividerar med Δt på båda sidorna. Då får vi

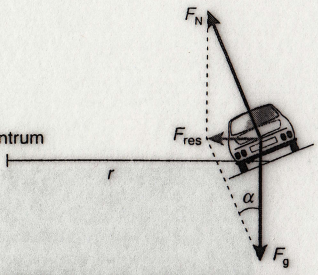
$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{r} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

När $\Delta t \to 0$ går vänsterledet mot a och högerledet mot

$$\frac{v}{r} \cdot v = \frac{v^2}{r}$$

Därmed har vi funnit att

$$a = \frac{v^2}{r}$$



4.11 Krafter på en bil i en kurva med dosering. Det är resultanten av tyngden och normalkraften som håller kvar bilen på vägen.

EXEMPEL 12 Kurva med dosering

Så kör bilen in i en kurva som Vägverket kommit ihåg att dosera. Det betyder att vägbanan har en lutningsvinkel α så att kurvans ytterkant ligger högre än innerkanten. Se figur 4.11. Bilföraren kan nu anpassa hastigheten v så att enbart doseringen håller bilen kvar på vägen. Detta betyder att $F_\mu = 0$. Newtons andra lag ger då

$$\vec{F}_{res} = \vec{F}_g + \vec{F}_N = m\vec{a}$$

Av figur 4.11 ser du att

$$\tan\alpha = \frac{F_{res}}{F_g} = \frac{m\frac{v^2}{r}}{mg} = \frac{v^2}{rg}$$

som ger

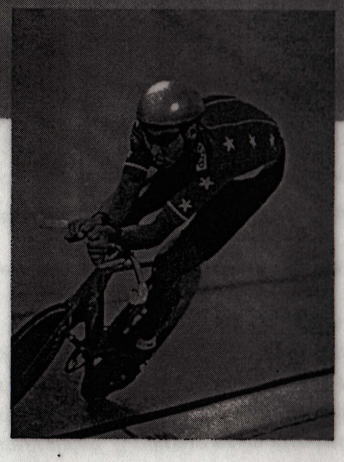
$$v = \sqrt{rg\tan\alpha}$$

Alla storheterna på högra sidan är konstanta: g är given av naturen, medan r och α är givna av Vägverket. Om föraren anpassar hastigheten så att $v = \sqrt{rg\tan\alpha}$, så är det enbart doseringen som håller kvar bilen på vägen. För passagerarna känns det nästan exakt som att sitta i en bil som kör med konstant fart på en rät väg. Den enda skillnaden är att de känner sig lite tyngre.

Vi tänker oss att kurvradien är $r = 150$ m. Om kurvan är doserad för en medelhastighet på $v = 60$ km/h = 16,7 m/s, så bör doseringen vara sådan att

$$\tan\alpha = \frac{v^2}{rg} = \frac{16{,}7^2}{150 \cdot 9{,}82}$$

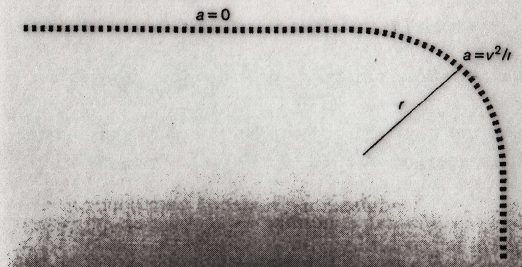
Det ger α=10,7°.



Kurvorna i velodromcykling är starkt doserade.

EXEMPEL 13 Oändligt ryck?

Tänk dig ett tåg som kör med konstant fart på en raksträcka som övergår i en cirkelformad sväng där tåget fortsätter att köra med samma fart. Se figur 4.12.



4.12 Raksträcka som övergår i cirkelformad sväng.

I det ögonblick svängen börjar så förändras accelerationen från $a = 0$ till $a = \frac{v^2}{r}$. Vi har inte talat om förändring av acceleration tidigare, något som matematiskt uttrycks som $j(t) = a'(t)$. På engelska kallas den här storheten för "jerk", som vi kan översätta till ryck.

Om vår järnväg är konstruerad på det sätt som vi antyder i figur 4.12 så kommer accelerationens derivata att bli oändligt stor när vi går in i kurvan (och oändligt negativ när vi går ut ur kurvan). Är det ett problem? Låt oss tänka efter.

Om du står utan att hålla i dig i en buss som har konstant fart så kan du stå i lodlinjen utan att luta dig i en eller annan riktning. Om bussen har konstant acceleration, dvs om $a'(t) = 0$, så går det också bra, bara du lutar dig mot accelerationen med en bestämd vinkel.

Men så snart bussens acceleration förändras upplever du ett ryck och måste ta ett steg för att inte falla. I vårt järnvägsexempel ovan är det rycket oändligt stort, så tåget spårar ur!

I verkligheten kan sådana kurvor inte accepteras, vare sig på vägar, järnvägar eller berg- och dalbanor. Verklighetens kurvor inleds därför med en så kallad klotoid. Det är en sväng där radien ökar från oändlig (raksträcka) till den kurvradie som passar terrängen och trafiken just där. Storheten "ryck" är för övrigt viktig både fysiologiskt (vad kroppen tål) och ingenjörsmässigt (vad konstruktioner tål). Varken maskiner eller människor tål hur stora ryck som helst.